

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Erfrischungsgetränk)

Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Gib die erste Ableitung der Funktion f an.

a) $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$

b) $f(x) = 2\cos(3x - 2)$

(3VP)

2) Bestimme eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = 4\sin(2x)$.

(1VP)

3) Löse die Gleichung für $0 \leq x \leq 2\pi$.

a) $\cos(2x) = 0$

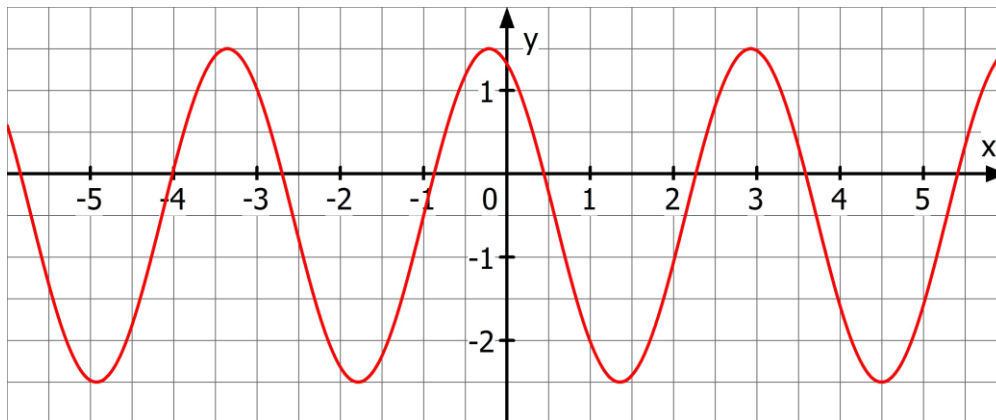
b) $\sin^2(x) + \sin(x) = 2$

(4VP)

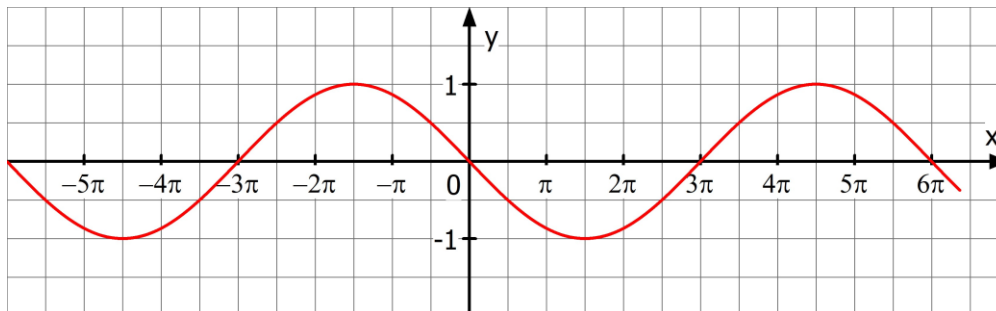
4) Gib zu den folgenden Schaubildern mögliche Funktionsterme an.

(2VP)

a)



b)



5) Gegeben sind die Ebene $E: x_1 + x_2 = 4$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Beschreibe die besondere Lage von E im kartesischen Koordinatensystem.

b) Untersuche die gegenseitige Lage von g und E .

(2VP)

6) Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ und der Punkt $P(7|4|0)$.

a) Zeige, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.

b) Beschreibe die besondere Lage von P im Koordinatensystem.

c) P wird an der x_2x_3 -Ebene gespiegelt.

Gib die Koordinaten des so entstehenden Spiegelpunktes P' an.

(3VP)

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Erfrischungsgetränk)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $f'(x) = 4x \cdot e^{-2x} + (2x^2 + 5) \cdot (-2) \cdot e^{-2x}$ (2P)

b) $f'(x) = -2 \sin(3x - 2) \cdot 3 = -6 \sin(3x - 2)$ (1P)

3P

2) $F(x) = -4 \cos(2x) \cdot \frac{1}{2} = -2 \cos(2x)$

1P

3) a) $b = 2 \Rightarrow p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ Skizze von Kosinusfunktion mit Periode π und Nullstellen:

$x_1 = \frac{1}{4}\pi, x_2 = \frac{3}{4}\pi, x_3 = \frac{5}{4}\pi, x_4 = \frac{7}{4}\pi$

 (2P)

b) Subst.: $u = \sin(x)$

$$u^2 + u - 2 = 0 \Rightarrow u_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$u_1 = 1 \Rightarrow \sin(x) = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}} \quad \text{oder} \quad u_2 = -2 \Rightarrow \sin(x) = -2 \Rightarrow \text{k.L.} \quad (2P)$$

4P

4) a) $f(x) = 2 \sin(2(x+1)) - 0,5$ (1P)

b) $f(x) = -\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ (1P)

2P

5) a) Die Ebene E liegt parallel zur x_3 -Achse, da die x_3 -Koordinate nicht in der Ebenengleichung vorkommt. (1P)

b) Setze g in E ein:

$$1+t+2-t=4 \Leftrightarrow 3+0t=4 \Rightarrow \text{k.L.} \Rightarrow g \text{ ist parallel zu E} \quad (1P)$$

2P

6) a) Setze P in E ein:

$$2 \cdot 7 + 4 - 0 = 0 \Leftrightarrow 18 = 0 \Rightarrow P \text{ liegt nicht auf E.} \quad (1P)$$

b) P liegt in der x_1x_2 -Ebene, da die x_3 -Koordinate von P Null ist. (1P)

c) Durch die Spiegelung wird nur die x_1 -Koordinate verändert: $P'(-7 | 4 | 0)$ (1P)

3P

Summe: 15 Punkte

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Erfrischungsgetränk)

Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Aufgabe 1

Ein Getränk wird aus dem Kühlschrank genommen und an einen warmen Ort gestellt.
Die Temperatur des Getränks wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 25 - 19 \cdot e^{-0,045t}$$



(t in Minuten nach der Entnahme aus dem Kühlschrank, $f(t)$ in $^{\circ}\text{C}$).

- a) (1) Welche Temperatur hat das Getränk eine Viertelstunde nach seiner Entnahme aus dem Kühlschrank?
(2) Nach welcher Zeit hat das Getränk eine Temperatur von $9,5^{\circ}\text{C}$ erreicht?
(3) Um wie viel Grad erwärmt sich das Getränk in den ersten 5 Minuten nach Entnahme aus dem Kühlschrank?
(4) Bestimme die mittlere Temperatur innerhalb der ersten halben Stunde nach Entnahme aus dem Kühlschrank.
(5) Weise rechnerisch nach, dass die Temperatur des Getränks nach der Entnahme aus dem Kühlschrank ständig zunimmt.
(6) Bestimme einen Zeitraum, in dem die Temperatur um 10°C zunimmt.

(8VP)

- b) Ein anderes Getränk wird aus dem Kühlschrank direkt in die Sonne gestellt. Seine Temperatur kann beschrieben werden durch die Funktion g mit

$$g(t) = 40 - e^{-a \cdot t + b}$$

(t in Minuten nach der Entnahme aus dem Kühlschrank, $g(t)$ in $^{\circ}\text{C}$)

- (1) Das Getränk erwärmt sich in den ersten 15 Minuten nach der Entnahme aus dem Kühlschrank von 6°C auf 23°C .
Berechne die Werte von a und b .

(Teilergebnis: $g(t) = 40 - e^{-0,046 \cdot t + 3,526}$).

- (2) Bestimme die Temperatur, die das Getränk langfristig annimmt.

(4VP)

Aufgabe 2

Für jedes a mit $0 \leq a \leq 5$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + 3 + a^2$$

Zeige, dass es keinen Wert von a gibt, für den der Tiefpunkt des Graphen von f_a auf der x -Achse liegt.

(3VP)

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Erfrischungsgetränk)

Lösungen Wahlteil:

Aufgabe 1

a) (1) $f(15) = 15,3 \Rightarrow 15,3^\circ\text{C}$ (0,5P)

(2) $f(t) = 9,5 \Rightarrow t = 4,5$

$\Rightarrow$ Nach 4,5 Minuten hat das Getränk eine Temperatur von $9,5^\circ\text{C}$. (1P)

(3) $f(0) = 6$ und $f(5) = 9,8$ $f(5) - f(0) = 9,8 - 6 = 3,8$

$\Rightarrow$ In den ersten 5 Minuten erwärmt sich das Getränk um $3,8^\circ\text{C}$. (1,5P)

(4) $\frac{1}{30} \int_0^{30} f(t) dt = \left[25t - 19 \cdot e^{-0,045t} \frac{1}{-0,045} \right]_0^{30} = 14,6$.

$\Rightarrow$ Die mittlere Temperatur in den ersten 30 Minuten beträgt $14,6^\circ\text{C}$. (2,5P)

(5) $f'(t) = -19 \cdot (-0,045) \cdot e^{-0,045t} = \underbrace{0,855}_{>0} \cdot \underbrace{e^{-0,045t}}_{>0} > 0$ (1P)

(6) z.B. von Beginn an: $f(t) - f(0) = 10 \Rightarrow t = 16,6$

$\Rightarrow$ In den ersten 16,6 Minuten nimmt die Temperatur um 10°C zu. (1,5P)

8P

b) (1) $g(t) = 40 - e^{-a \cdot t + b}$

(I) $g(0) = 6$ und (II) $g(15) = 23$

(I) $6 = 40 - e^{-0+b} \Leftrightarrow 34 = e^b \Leftrightarrow \boxed{b = \ln 34 = 3,526}$

(II) $23 = 40 - e^{-15a+3,526} \Rightarrow \boxed{a = 0,046}$

$\Rightarrow g(t) = 40 - e^{-0,046 \cdot t + 3,526}$ (2,5P)

(2) Für $t \rightarrow \infty$ gilt $g(t) = 40 - \underbrace{e^{-0,046 \cdot t + 3,526}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 40$

$\Rightarrow$ Das Getränk nimmt langfristig eine Temperatur von 40°C an. (1,5P)

4P

Aufgabe 2

$f'_a(x) = x - a$ (1P)

$f'_a(x) = 0 \Rightarrow x = a$

$f_a(a) = \frac{1}{2}a^2 - a^2 + 3 + a^2 = \frac{1}{2}a^2 + 3 \quad T_a\left(a \mid \frac{1}{2}a^2 + 3\right)$ (1P)

Damit der Tiefpunkt auf der x-Achse liegt, muss gelten $\frac{1}{2}a^2 + 3 = 0$

Diese Gleichung hat keine Lösung, da $\frac{1}{2}a^2 + 3 > 0$ für alle $0 \leq a \leq 5$ (1P)

3P

Summe: 15 Punkte